| EXERCICE N°1 : | 20' | 4 points | |
|---|---|---|---|

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=2+\cos(2x)$

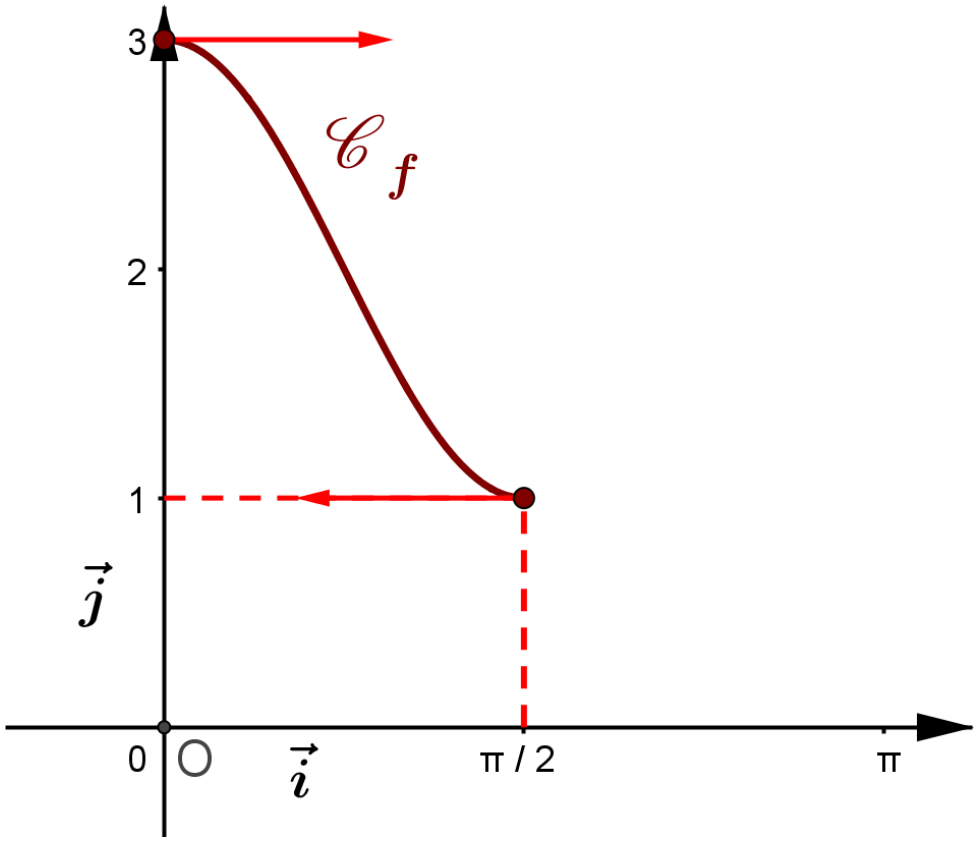
**1°) a)** Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**b)** Montrer que $f$ est une bijection de $f$ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

**c)** Le graphique ci-dessous est la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la fonction $f^{-1}$.




**2°) a)** Calculer $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5}{2}\right)$.

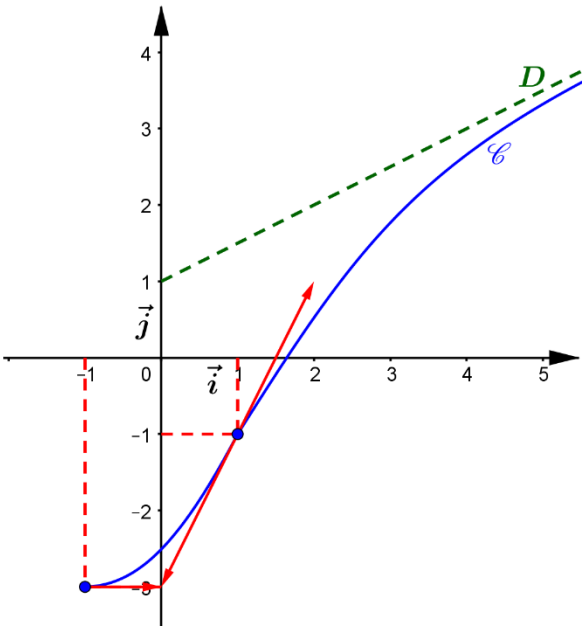
**b)** $f^{-1}$ est-elle dérivable à droite en 1 ? justifier.

**3°)** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $]1,3[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

## EXERCICE N°2 : 20' 4 points

La courbe $\mathscr{C}$ de ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction $f$ continue et dérivable sur $[-1,+\infty[$.

La droite $D$ étant son asymptote au voisinage de $(-\infty)$.




À partir du graphique et des renseignements fournis ;

**1°)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ; $f(1)$ et $f'(1)$.

**2°)** Justifier que $f$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle $J$ qu'on précisera.

**3°)** On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

**a)** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en$(-1)$,puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

**b)** Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ à droite en –3.

**c)** Tracer dans le même repère la courte de $f^{-1}$.

## EXERCICE N°3 : 30' 6 points

Soit $f$ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1°) a)** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

**b)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**2°)** Dresser le tableau de variation de $f$ et en déduire que $f$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$.

**3°)** On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de $f^{-1}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de $f$ et $\mathscr{C}'$ de $f^{-1}$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**4°)** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]0,1]$.

**5°)** Pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)+\tan x$.

**a)** Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

**b)** Montrer que $g$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

**c)** En déduire que $g$ réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.

**d)** On note $g^{-1}$ la fonction réciproque de $g$.

Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en 2 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(2)$.